Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Superior
Prueba 1

30 de octubre de 2023

Zona A tarde | **Zona B** tarde | **Zona C** tarde

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

8823 – 7121

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 5]

Considere las funciones $f(x) = x - 3$ y $g(x) = x^2 + k^2$, donde k es una constante real.

(a) Escriba una expresión para $(g \circ f)(x)$. [2]

(b) Sabiendo que $(g \circ f)(2) = 10$, halle los posibles valores de k. [3]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

2. [Puntuación máxima: 4]

Para los sucesos A y B se cumple que $\mathrm{P}(A) = 0{,}65$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}75$ y $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}6$.

(a) Halle $\mathrm{P}(A \cup B)$. [2]

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo alternativo, halle $\mathrm{P}(A' \cap B')$. [2]

3. [Puntuación máxima: 7]

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética viene dada por $S_n = pn^2 - qn$, donde p y q son constantes positivas.

Se sabe que $S_4 = 40$ y $S_5 = 65$.

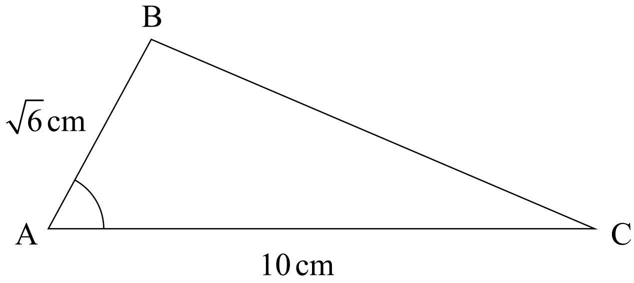
(a) Halle el valor de p y el valor de q. [5]

(b) Halle el valor de u_5. [2]

4. [Puntuación máxima: 6]

En el siguiente triángulo ABC, $\mathrm{AB} = \sqrt{6}\ \mathrm{cm}$, $\mathrm{AC} = 10\,\mathrm{cm}$ y $\cos \mathrm{B\hat{A}C} = \dfrac{1}{5}$.

la figura no está dibujada a escala



Halle el área del triángulo ABC.

5. [Puntuación máxima: 6]

El desarrollo de la potencia de un binomio para $(1 + kx)^n$ viene dado por $1 + 12x + 28k^2x^2 + ... + k^nx^n$ donde $n \in \mathbb{Z}^+$ y $k \in \mathbb{Q}$.

Halle el valor de n y el valor de k.

6. [Puntuación máxima: 7]

Pruebe mediante inducción matemática que $5^{2n} - 2^{3n}$ es divisible entre 17 para todo $n \in \mathbb{Z}^{+}$.

7. [Puntuación máxima: 5]

Se sabe que $z = 5 + q\mathrm{i}$ satisface la ecuación $z^2 + \mathrm{i}z = -p + 25\mathrm{i}$, donde $p,\ q \in \mathbb{R}$.

Halle el valor de p y el valor de q.

8. [Puntuación máxima: 9]

(a) Halle $\int x(\ln x)^2 \mathrm{d}x$. [6]

(b) A partir de lo anterior, muestre que $\int_1^4 x(\ln x)^2 \mathrm{d}x = 32(\ln 2)^2 - 16\ln 2 + \frac{15}{4}$. [3]

9. [Puntuación máxima: 8]

Considere la función $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}^2(kx)}{x^2}$, donde $x \neq 0$ y $k \in \mathbb{R}^+$.

(a) Muestre que f es una función par. [2]

(b) Sabiendo que $\lim_{x\to 0} f(x)=16$, halle el valor de k. [6]

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 15]

Las funciones f y g vienen dadas por

$f(x) = \ln(2x - 9)$, donde $x > \frac{9}{2}$

$g(x) = 2\ln x - \ln d$, donde $x > 0$, $d \in \mathbb{R}^+$.

(a) Indique la ecuación de la asíntota vertical del gráfico de $y = g(x)$. [1]

Los gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se cortan en dos puntos distintos.

(b) (i) Muestre que, en esos puntos de intersección, se cumple que $x^2 - 2dx + 9d = 0$.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que $d^2 - 9d > 0$.

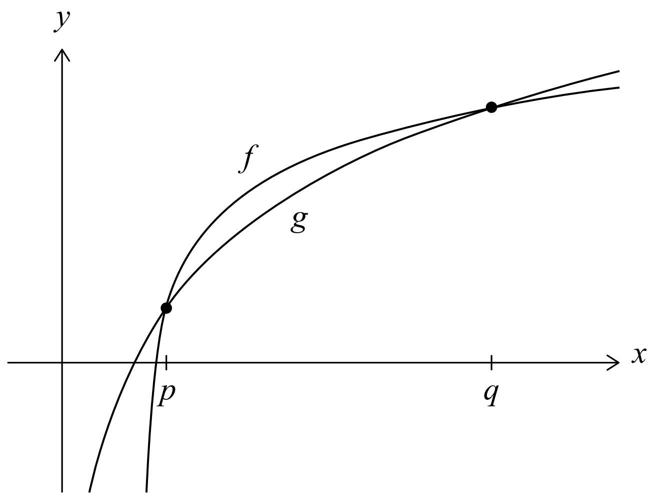
(iii) Halle el intervalo de posibles valores de d. [9]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

No escriba soluciones en esta página.

(Pregunta 10: continuación)

La siguiente figura muestra una parte de los gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$.



Los gráficos se cortan en $x = p$ y $x = q$, donde $p < q$.

(c) Para el caso en el que $d = 10$, halle el valor de $q - p$. Exprese la respuesta en la forma $a\sqrt{b}$, donde a, $b \in \mathbb{Z}^{+}$. [5]

No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 21]

Considere la función $f(x)=\mathrm{e}^{\cos 2x}$, donde $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4}$.

(a) Halle las coordenadas de los puntos de la curva $y=f(x)$ donde la pendiente es cero. [5]

(b) Utilizando la derivada segunda en cada uno de los puntos hallados en el apartado (a), muestre que la curva $y=f(x)$ tiene dos máximos locales y un mínimo local. [4]

(c) Dibuje aproximadamente la curva de $y=f(x)$ para $0 \le x \le \pi$, teniendo presentes los valores relativos de la derivada segunda que halló en el apartado (b). [3]

(d) (i) Halle la serie de Maclaurin correspondiente a $\cos 2x$, llegando hasta (e incluyendo) el término en x^4.

(ii) A partir de lo anterior, halle la serie de Maclaurin correspondiente a $\mathrm{e}^{\cos 2x-1}$, llegando hasta (e incluyendo) el término en x^4.

(iii) A partir de lo anterior, escriba la serie de Maclaurin correspondiente a $f(x)$, llegando hasta (e incluyendo) el término en x^4. [6]

(e) Utilice los dos primeros términos distintos de cero de la serie de Maclaurin correspondiente a $f(x)$ para mostrar que $\int_0^{1/10} \mathrm{e}^{\cos 2x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{149\mathrm{e}}{1500}$. [3]

No escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 17]

(a) Halle el desarrollo de la potencia de un binomio para $(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)^5$. Dé la respuesta en la forma $a + b\mathrm{i}$ donde a y b se han de expresar en función de $\mathrm{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$. [4]

(b) Utilizando el teorema de De Moivre y la respuesta dada en el apartado (a), muestre que $\mathrm{sen}\,5\theta \equiv 16\,\mathrm{sen}^5\theta - 20\,\mathrm{sen}^3\theta + 5\,\mathrm{sen}\,\theta$. [6]

(c) (i) A partir de lo anterior, muestre que $\theta = \frac{\pi}{5}$ y $\theta = \frac{3\pi}{5}$ son soluciones de la ecuación $16\,\mathrm{sen}^4\theta - 20\,\mathrm{sen}^2\theta + 5 = 0$.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que $\mathrm{sen}\frac{\pi}{5}\mathrm{sen}\frac{3\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4}$. [7]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.